

附录：引理和证明

本附录为第一部分介绍了命题和定理证明需要的引理，第二部分为本文的命题和定理的证明。

（一）附录 A：引理

引理 1 假设 Z_n 是一个随机序列，如果 $EZ_n^2 = O(n^\nu)$ ，其中 ν 是一个常数，那么 $Z_n = O_p(n^{\nu/2})$ 成立。

引理 1 常常用于计算随机序列的数量级数，该引理在 Baltagi 等 (2011) 的附录中给出。

引理 2 令 z_i ， $i=1,2,\dots,n$ 为 T 维随机向量。对于每个 z_i 中的元素都满足 $Ez_{it} = 0$ ， $E(z_{it}^2) = 1$ ，并且 $E(z_{it}^4) = 3 + \Delta < \infty$ 。对于任意的 $T \times T$ 维矩阵 Γ ，我们可以得到：

- (a) $E(z_i' \Gamma z_i) = \text{tr}(\Gamma)$;
- (b) $E(z_i' \Gamma z_i)^2 = \text{tr}(\Gamma^2)$;
- (c) $E(z_i' \Gamma z_i)^2 = \text{tr}^2(\Gamma) + 2\text{tr}(\Gamma^2) + \Delta \text{tr}(\Gamma \circ \Gamma)$;
- (d) $E(z_i' \Gamma z_i)^4 = 3\text{tr}^2(\Gamma^2) + 6\text{tr}(\Gamma^4) + 6\Delta \text{tr}(\Gamma^2 \circ \Gamma^2) + \Delta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^4$ ，这里 a_{ij} 是矩阵 Γ 中第 i 行第 j 列的元素；

$$(e) E(z_i' A z_i z_i' B z_i) = \text{tr}(A)\text{tr}(B) + \text{tr}(AB) + \Delta \text{tr}(A \circ B).$$

引理 2 直接从 Chen 等 (2010) 的附录中得到，所以这里我们省略了证明过程。

引理 3 在假设 1-3 和原假设条件下，可以得到：

- (a) $\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \hat{s}_{ij}^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (\tilde{v}_i' \tilde{v}_j)^2 + O_p\left(\frac{n}{T^2}\right)$;
- (b) $\frac{1}{T} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \hat{s}_{ii} \hat{s}_{jj} = \frac{1}{T^3} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{v}_i' \tilde{v}_i \tilde{v}_j' \tilde{v}_j + O_p\left(\frac{n}{T^3}\right)$.

引理 4 定义

$$t_{NT} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(\frac{1}{T^2} \tilde{v}_i' \tilde{v}_j \right)^2 - \frac{1}{T^3} \tilde{v}_i' \tilde{v}_i \tilde{v}_j' \tilde{v}_j \right], \quad \hat{t}_{NT} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(\frac{1}{T^2} \tilde{v}_i' \tilde{v}_j \right)^2 - \frac{1}{T^3} \tilde{v}_i' \tilde{v}_i \tilde{v}_j' \tilde{v}_j \right].$$

在假设 1-3 和原假设条件下，可以得到：

- (a) $E(\hat{t}_{NT} - t_{NT}) = \frac{T-1}{T^3} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2$;
- (b) $\text{Var}(\hat{t}_{NT} - t_{NT}) = O_p\left(\frac{n^2}{T^3}\right) + O_p\left(\frac{n^3}{T^4}\right)$.

引理 5 在假设 1-3 和原假设条件下，当 $(n, T) \rightarrow \infty$ 时，可以得到： $\hat{\sigma}_{NT} - \sigma_{NT} \xrightarrow{p} 0$.

引理 6 在假设 1-3 和原假设条件下，可以得到：

$$(a) E(\hat{t}_{NT}^*) = \frac{(T-1)^3}{T^5} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2$$

$$(b) \text{Var}(\hat{t}_{NT}^*) = O_p\left(\frac{n^3}{T^5}\right).$$

引理 7 在假设 2-3 和原假设下，当 $(n, T) \rightarrow \infty$ ，我们有

$$\text{Schott} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

引理 3—7 的证明在补充附录里，请联系作者提供。

（二）附录 B：命题和定理的证明

1. 命题 1 的证明。

利用引理 4 和切比雪夫引理，可以证明：

$$\hat{t}_{NT} - t_{NT} = \frac{T-1}{T^3} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2 + O_p\left(\frac{n}{T\sqrt{T}}\right) + O_p\left(\frac{n\sqrt{n}}{T^2}\right).$$

利用命题 1 和引理 5，可以得到：

$$T_n - \text{Schott} - B_1 = \frac{\hat{t}_{NT}}{\hat{\sigma}_{NT}} - \frac{t_{NT}}{\sigma_{NT}} - \frac{t_{NT}^*}{\sigma_{NT}} = \frac{(\hat{t}_{NT} - t_{NT}) - t_{NT}^*}{\sigma_{NT}}.$$

首先，我们考虑分子项。当 $(n, T) \rightarrow \infty$ 时，分子项变为：

$$\begin{aligned} & (\hat{t}_{NT} - t_{NT}) - t_{NT}^* \\ &= \left[\frac{T-1}{T^3} - \frac{T-1}{T^3} \right] \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2 + O_p\left(\frac{n}{T\sqrt{T}}\right) + O_p\left(\frac{n\sqrt{n}}{T^2}\right) \\ &= O_p\left(\frac{n}{T\sqrt{T}}\right) + O_p\left(\frac{n\sqrt{n}}{T^2}\right). \end{aligned}$$

接下来我们考虑分母项：

$$\sigma_{NT} = O_p\left(\frac{n}{T}\right).$$

根据以上结果，容易证明：

$$T_n - \text{Schott} - B_1 = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{T}\right).$$

2. 命题 2 的证明。

当 $(n, T) \rightarrow \infty$ 时，根据引理 6，可以得到：

$$\begin{aligned} & \hat{t}_{NT}^* - t_{NT}^* \\ &= \frac{(T-1)^3 - (T-1)T^2}{T^5} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2 + O_p\left(\frac{n\sqrt{n}}{T^2\sqrt{T}}\right) \\ &= \frac{-2T^2 + 3T - 1}{T^5} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^2 \sigma_j^2 + O_p\left(\frac{n\sqrt{n}}{T^2\sqrt{T}}\right) \\ &= o_p(1). \end{aligned}$$

因此，我们可以得到 $\hat{t}_{NT}^* - t_{NT}^* \xrightarrow{p} 0$ 。从引理 5, 我们有 $\hat{\sigma}_{NT} \xrightarrow{p} \sigma_{NT}$ 。利用以上结论，我们可以得到 $B_2 \xrightarrow{p} B_1$ 。

3. 定理 1 的证明。

根据 $Schott \xrightarrow{d} N(0,1)$, $BCSchott = Schott + (T_n - Schott) - B_1$ 以及命题 2, 当 $(n, T) \rightarrow \infty$ 并且 $c_n \rightarrow c$ 时，我们可以得到：

$$BCSchott = Schott + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) + O_p\left(\frac{\sqrt{n}}{T}\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

4. 定理 2 的证明。

根据 $S_{bc} = Schott + (T_n - Schott) - B_2$, $Schott \xrightarrow{d} N(0,1)$ 和命题 2, 当 $(n, T) \rightarrow \infty$ 并且 $c_n \rightarrow c$ 时，我们可以得到

$$S_{bc} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

参考文献

- [1] Baltagi B, Feng Q, Kao C. Testing for Sphericity in a Fixed Effects Panel Data Model[J]. The Econometrics Journal, 2011, 14(1): 25-47.
- [2] Chen S, Zhang L, Zhong P. Tests for High-Dimensional Covariance Matrices[J]. Journal of the American Statistical Association, 2010, 105(490): 810-819.